

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Damian Skrzypiec**

Nr albumu: 320335

# Ułamkowy ruch Browna

Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dr hab. Anna Talarczyk-Noble**  
Zakład Teorii Prawdopodobieństwa

Czerwiec 2014

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

## **Streszczenie**

W niniejszej pracy omawiany jest ułamkowy ruch Browna. Udowodnimy, że taki proces istnieje. Zbadamy jego ważniejsze własności. Zobaczymy, że da się go przedstawić jako całkę względem procesu Wienera i to na kilka sposobów. Na koniec zajmiemy się twierdzeniem, w którym tytułowy proces pojawia się jako proces graniczny.

## **Słowa kluczowe**

Ułamkowy ruch Browna, proces Wienera, całka stochastyczna, semimartyngał

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

60 - Teoria prawdopodobieństwa i procesy stochastyczne

60G - Procesy stochastyczne

60G22 - Procesy ułamkowe, wraz z ułamkowym ruchem Browna

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Fractional Brownian motion



# Spis treści

<b>1. Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>2. Istnienie ułamkowego ruchu Browna</b> . . . . .	7
<b>3. Własności ułamkowego ruchu Browna</b> . . . . .	11
3.1. Stacjonarność przyrostów . . . . .	11
3.2. Samopodobieństwo . . . . .	11
3.3. Unikalność . . . . .	12
3.4. FBm jako proces niebędący semimartyngalem . . . . .	13
<b>4. Reprezentacja ułamkowego ruchu Browna</b> . . . . .	19
4.1. Reprezentacja czasowa . . . . .	19
4.2. Reprezentacja spektralna . . . . .	20
4.3. FBm jako proces Volterra . . . . .	21
<b>5. Ułamkowy ruch Browna jako proces graniczny</b> . . . . .	25
<b>6. Podsumowanie</b> . . . . .	29



# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Głównym celem mojej pracy jest przedstawienie własności i zachowań ułamkowego ruchu Browna. Czasami w pracy posłużę się szeroko stosowanym skrótem nazwy opisywanego procesu - fBm (fractional Brownian motion). Zaczniemy od zdefiniowania tego pojęcia.

**Definicja 1.1.** Ułamkowym ruchem Browna nazywamy gaussowski proces stochastyczny  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  ze średnią  $\mathbb{E}B_t^H = 0$  dla dowolnego  $t \geq 0$ , ciągłymi trajektoriami oraz funkcją kowariancji daną wzorem

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}),$$

gdzie  $0 < H < 1$  jest parametrem Hursta.

Po raz pierwszy w literaturze proces ten wprowadził Andriej Nikołajewicz Kołmogorow w 1940 roku przy okazji badania pewnych krzywych spiralnych w przestrzeni Hilberta<sup>1</sup>. W 1968 roku Mandelbrot oraz Van Ness przedstawili ułamkowy ruch Browna jako następującą całkę względem procesu Wienera

$$B_t^H = \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dW_s. \quad (1.1)$$

Powyższą formułę udowodnimy w rozdziale czwartym. Zauważmy, że wzór (1.1) jest podobny do wzoru z użyciem całek częściowych

$$\int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \dots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} g(s) ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} g(s) ds. \quad (1.2)$$

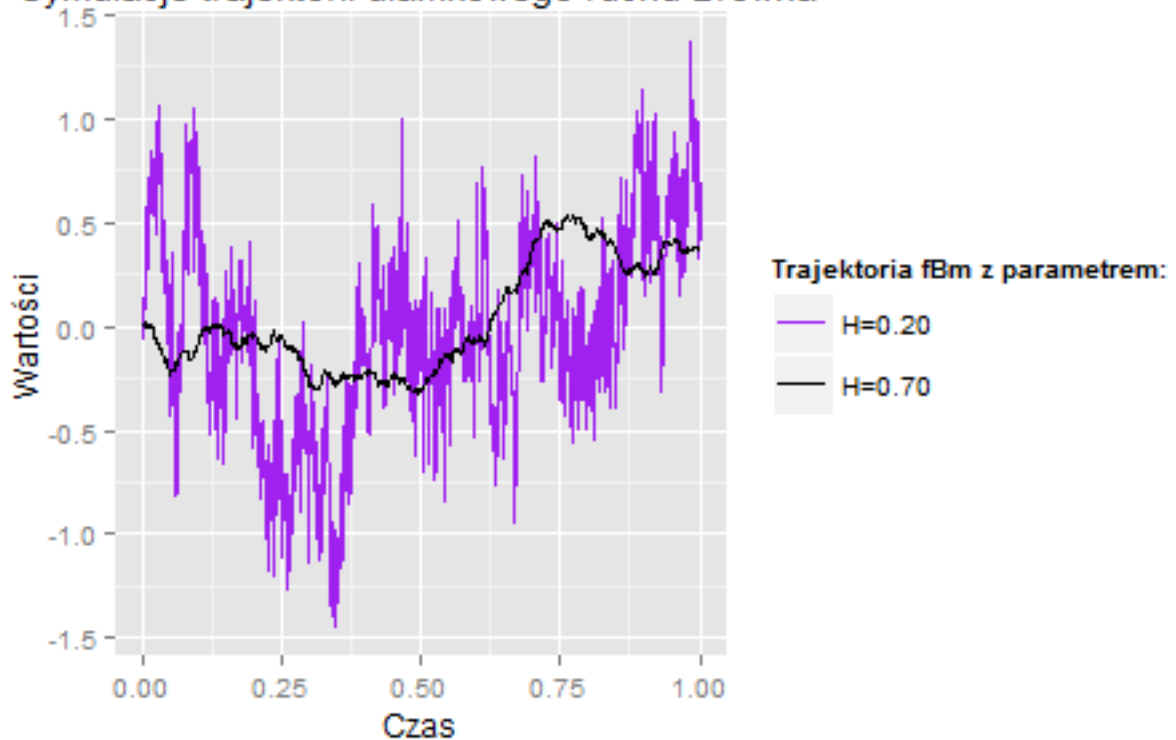
Stąd właśnie się wzięła nazwa *ułamkowy ruch Browna* na określenie procesu zdefiniowanego przez Kołmogorowa [6]. Skąd wzięła się nazwa samego parametru Hursta? Pochodzi od nazwiska Harolda Hursta - brytyjskiego hydrologa. Dlaczego więc nazwano parametr obiektu matematycznego od jego nazwiska? W połowie XIX wieku Hurst za pomocą statystyki R/S badał dane o zmianach poziomu Nilu. Przy założeniu skończonej wariacji, statystyka R/S powinna rosnąć w tempie  $\sqrt{n}$ , gdzie  $n$  jest rozmiarem próbki. Natomiast dane zebrane przez Hursta wskazują na wzrost rzędu  $n^H$ , gdzie  $H = 0.74$ . Mandelbrot podejrzewał, że ułamkowy ruch Browna może posłużyć do opisu danych z Nilu. Używał on w swojej pracy właśnie parametru  $H$  od nazwiska Hursta. Obecnie jest to powszechnie używane oznaczenie.

Następnie spójrzmy na ilustrację przedstawiającą zachowanie się dwóch trajektorii ułamkowego ruchu Browna dla pewnych parametrów.

---

<sup>1</sup>Kołmogorov, A. N. (1940). Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum.

## Symulacje trajektorii ułamkowego ruchu Browna



Często modelowanie procesem Wienera nie jest na tyle zgodne z rzeczywistością jak byśmy tego chcieli. Patrząc na powyższą ilustrację rodzi się od razu pomysł, żeby zamiast procesem Wienera modelować ułamkowym ruchem Browna, odpowiednio manipulując parametrem Hursta. Jest niestety jedno utrudnienie. Jak pokażemy w podrozdziale 3.4 ułamkowy ruch Browna nie jest semimartyngałem, zatem całkowanie względem tego procesu, jakże ważne dla zastosowań, jest zadaniem nietrywialnym. Z drugiej strony to właśnie może być motywacją do głębszego badania tego zagadnienia.



## Rozdział 2

# Istnienie ułamkowego ruchu Browna

W niniejszym rozdziale udowodnimy, że ułamkowy ruch Browna istnieje. Dowód będzie się opierał na twierdzeniu Kołmogorowa.

### Twierdzenie 2.1. (Kołmogorowa)

Niech  $\Gamma : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Istnieje scentrowany proces gaussowski  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  z funkcją kowariancji  $\Gamma$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\Gamma$  jest dodatnio określona.

**Dowód.** Można znaleźć na przykład w [2, twierdzenie 12.1.3].

Przypomnijmy pojęcie hölderowskiej ciągłości funkcji.

**Definicja 2.1.** Funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $\alpha$ -hölderowsko ciągła jeśli istnieje stała  $C > 0$  taka, że zachodzi nierówność

$$|f(t) - f(s)| \leq C|t - s|^\alpha \quad \forall t, s \in [a, b].$$

### Twierdzenie 2.2. (Kołmogorowa o ciągłości trajektorii) [3]

Założmy, że  $X = (X_t)_{t \in [a, b]}$  jest procesem takim, że

$$\forall t, s \in [a, b] \quad \mathbb{E} |X_t - X_s|^\alpha \leq C|t - s|^{1+\beta} \quad (2.1)$$

dla pewnych stałych dodatnich  $\alpha, \beta, C$ . Wówczas istnieje proces  $Y = (Y_t)_{t \in [a, b]}$ , będący modyfikacją procesu  $X$ , którego wszystkie trajektorie są ciągłe. Co więcej trajektorie każdej modyfikacji  $X$  o ciągłych trajektoriach są, z prawdopodobieństwem 1, hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem  $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$ .

### Lemat 2.1. (Kołmogorowa-Centsova)

Niech  $X = (X_t)_{t \in T}$  będzie scentrowanym procesem gaussowskim, gdzie  $T = [0, M] \subset \mathbb{R}$  dla pewnego  $M > 0$ . Przypuśćmy, że istnieją stałe  $C, \alpha > 0$  takie, że

$$\mathbb{E} (X_t - X_s)^2 \leq C|t - s|^\alpha \quad \forall t, s \in T, \quad (2.2)$$

wtedy dla dowolnego  $\eta \in (0, \frac{\alpha}{2})$  istnieje ciągła modyfikacja  $Y$  procesu  $X$  z prawie wszystkimi  $\eta$ -hölderowsko ciągłymi trajektoriami.

**Dowód.** Niech  $t > s$ . Skoro  $X$  jest scentrowanym procesem gaussowskim, to zachodzi

$$X_t - X_s \sim \sqrt{\mathbb{E} (X_t - X_s)^2} \cdot Z \quad \text{gdzie} \quad Z \sim N(0, 1). \quad (2.3)$$

Następnie z powyższego oraz ze stacjonarności przyrostów (tę własność przedstawimy w następnym rozdziale) wnioskujemy, że dla dowolnego  $p \geq 1$  zachodzi

$$\mathbb{E} |X_t - X_s|^p \leq C^{\frac{p}{2}} \mathbb{E} |Z|^p |t - s|^{\alpha \frac{p}{2}} = C_1 |t - s|^{\alpha \frac{p}{2}}. \quad (2.4)$$

Aplikacja twierdzenia 2.2 kończy dowód.

□

Teraz jesteśmy gotowi udowodnić, że ułamkowy ruch Browna istnieje.

**Twierdzenie 2.3. (o istnieniu)** [4, stwierdzenie 1.6]

Istnieje ciągle, gaussowski proces stochastyczny  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  z funkcją kowariancji daną wzorem

$$\Gamma_H(t, s) = \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $H \in [0, 1]$ .

**Dowód.** Dla parametru  $H = 1$  oraz  $H = 0$  funkcja kowariancji ma zdegenerowaną postać. Te procesy oczywiście nie są ułamkowym ruchem Browna. Zgodnie z zapowiedzią, kluczem w tym dowodzie jest skorzystanie z twierdzenia Kołmogorowa.

Gdy  $H > 1$ , to funkcja  $\Gamma_H$  nie jest dodatnio określona. Rzeczywiście, zobaczmy na następujący kontrprzykład. Niech  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $a_1 = -2$  oraz  $a_2 = 1$ . Wtedy

$$a_1^2 \Gamma_H(t_1, t_1) + 2a_1 a_2 \Gamma_H(t_1, t_2) + a_2^2 \Gamma_H(t_2, t_2) = 4 - 2^{2H} < 0. \quad (2.5)$$

Podobnie jest gdy  $H < 0$ . Niech  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $t_1 = n$  oraz  $t_2 = n + \frac{1}{n}$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ . Wtedy

$$\begin{aligned} a_1^2 \Gamma_H(t_1, t_1) + 2a_1 a_2 \Gamma_H(t_1, t_2) + a_2^2 \Gamma_H(t_2, t_2) &= t_1^{2H} (a_1^2 + a_1 a_2) + t_2^{2H} (a_2^2 + a_1 a_2) - \\ &- a_1 a_2 (t_2 - t_1)^{2H} = 3 \left( \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \right)^{-2H} + 6 \left( \frac{1}{n} \right)^{-2H} - 2n^{-2H} < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

dla pewnego dostatecznie dużego  $n \in \mathbb{N}$ , ponieważ  $H < 0$ .

Równie prostym przypadkiem jest  $H = 1$ , wtedy  $\Gamma_1(t, s) = ts$ . Zatem  $\forall_{d \geq 1}$ , dowolnych  $t_1, \dots, t_d \geq 0$  oraz  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\sum_{k, l=1}^d \Gamma_1(t_k, t_l) a_k a_l = \left( \sum_{k=1}^d t_k a_k \right)^2 \geq 0. \quad (2.7)$$

Oczywistym jest również co się dzieje dla  $H = 0$ . W tym przypadku funkcja kowariancji ma postać  $\Gamma_0(s, t) = \frac{1}{2}$ , a więc jest dodatnio określona. Zostaje nam do pokazania dodatnia określoność funkcji  $\Gamma_H$  dla  $H \in (0, 1)$ .

Dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  zamiana zmiennych  $v = u|x|$  prowadzi nas do przedstawienia  $|x|^{2H}$  w ciekawej formie

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^{2H+1}} du = \frac{1}{|x|} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-v^2}}{\left(\frac{v}{|x|}\right)^{2H+1}} dv = |x|^{2H} \int_0^\infty (1 - e^{-v^2}) v^{-1-2H} dv. \quad (2.8)$$

Zatem po unormowaniu otrzymujemy żadaną konkluzję

$$|x|^{2H} = \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 x^2}}{u^{2H+1}} du, \quad (2.9)$$

gdzie  $c_H = \int_0^\infty (1 - \exp(-u^2)) u^{-1-2H} du < \infty$ .

Teraz dla dowolnego  $t > s \geq 0$  możemy napisać

$$\begin{aligned} t^{2H} + s^{2H} - (t - s)^{2H} &= \\ &= \frac{1}{c_H} \left( \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 t^2} + 1 - e^{-u^2 s^2}}{u^{2H+1}} du - \int_0^\infty \frac{1 - e^{-u^2 (t-s)^2}}{u^{2H+1}} du \right) = \\ &= \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t^2})(1 - e^{-u^2 s^2})}{u^{2H+1}} du + \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t^2} (e^{2u^2 ts} - 1) e^{-u^2 s^2}}{u^{2H+1}} du = \\ &= \frac{1}{c_H} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2 t^2})(1 - e^{-u^2 s^2})}{u^{2H+1}} du + \frac{1}{c_H} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!} \int_0^\infty \frac{t^n e^{-u^2 t^2} s^n e^{-u^2 s^2}}{u^{2H-2n+1}} du. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ostatnie przejście jest konsekwencją rozwinięcia  $e^{2u^2ts} - 1$  w szereg Taylora oraz jego jednostajną zbieżnością.

Teraz dla dowolnych  $d \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_d \geq 0$  oraz  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$  możemy napisać

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^d \frac{1}{2} (t_k^{2H} + t_l^{2H} - |t_k - t_l|^{2H}) a_k a_l &= \frac{1}{2c_H} \int_0^\infty u^{-(2H+1)} \left( \sum_{k=1}^d (1 - e^{-u^2 t_k^2}) a_k \right)^2 du + \\ &+ \frac{1}{2c_H} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!} \int_0^\infty u^{-(2H-2n+1)} \left( \sum_{k=1}^d t_k^n e^{-u^2 t_k^2} a_k \right)^2 du \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Zatem pokazaliśmy, że  $\Gamma_H$  jest dodatnio określona dla  $H \in [0, 1]$ . Korzystając z twierdzenia Kołmogorowa wiemy, że opisywany proces istnieje. Pozostaje jeszcze wykazanie, że taki proces ma ciągłe trajektorie. Zauważmy, że

$$\mathbb{E} \left( B_t^H - B_s^H \right)^2 = |t - s|^{2H} \quad \forall s, t \geq 0,$$

zatem korzystając z lematu Kołmogorowa-Centsova dostajemy ciągłość trajektorii procesu  $B^H$ , a to kończy dowód istnienia. □

**Uwaga.**

Alternatywny dowód dodatniej określoności funkcji kowariancji można wywnioskować z dowodu twierdzenia o spektralnej reprezentacji ułamkowego ruchu Browna z podrozdziału 4.2.



## Rozdział 3

# Własności ułamkowego ruchu Browna

W tym rozdziale zajmiemy się badaniem własności tytułowego procesu.

### 3.1. Stacjonarność przyrostów

Na początku pokażemy, że fBm ma stacjonarne przyrosty.

**Definicja 3.1.** Proces  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ma stacjonarne przyrosty, jeśli dla każdego  $h > 0$  oraz dowolnych  $t, s \in \mathbb{T}$  takich, że  $t > s$  zachodzi  $X_{t+h} - X_t \sim X_h$ .

**Stwierdzenie 3.1. (Stacjonarność przyrostów)** [4, stwierdzenie 2.2]

Ułamkowy ruch Browna  $(B_t^H)_{t \geq 0}$  ma stacjonarne przyrosty.

**Dowód.** Zmienna losowa  $B_t^H - B_s^H$  ma rozkład normalny z zerową średnią, zatem zajmijmy się policzeniem wariancji

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t^H - B_s^H) &= \mathbb{E} \left( (B_t^H - B_s^H)^2 \right) = \mathbb{E} B_t^H B_t^H - 2\mathbb{E} B_t^H B_s^H + \mathbb{E} B_s^H B_s^H = \\ &= t^{2H} - \left( t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right) + s^{2H} = \\ &= (t-s)^{2H}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Stąd wynika, że  $B_t^H - B_s^H \sim N \left( 0, (t-s)^{2H} \right)$ , dla dowolnych  $t > s \geq 0$ .

Co kończy dowód. □

### 3.2. Samopodobieństwo

**Stwierdzenie 3.2. (Samopodobieństwo)** [4, stwierdzenie 2.2]

Ułamkowy ruch Browna jest samopodobny, to znaczy dla dowolnego  $a > 0$  zachodzi

$$(B_{at}^H)_{t \geq 0} \sim (a^H B_t^H)_{t \geq 0}.$$

**Dowód.** Aby udowodnić tezę wystarczy pokazać równość rozkładów skończenie wymiarowych, to znaczy

$$(B_{at_1}^H, \dots, B_{at_n}^H) \sim (a^H B_{t_1}^H, \dots, a^H B_{t_n}^H)$$

dla dowolnych  $t_1, \dots, t_n \geq 0$ . Zauważmy, że wektor  $(a^H B_{at_1}^H, \dots, a^H B_{at_n}^H)$  jest gaussowski, jako liniowe przekształcenie wektora  $(B_{at_1}^H, \dots, B_{at_n}^H)$ . Zatem wystarczy pokazać równość macierzy

kowariancji.

Niech  $t > s \geq 0$ , wtedy

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{at}^H, B_{as}^H) &= \mathbb{E}B_{at}^H B_{as}^H = \frac{1}{2} \left( (at)^{2H} + (as)^{2H} - (a(t-s))^{2H} \right) = \\ &= \frac{a^{2H}}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Jednocześnie z drugiej strony widzimy, że

$$\text{Cov}(a^H B_t^H, a^H B_s^H) = a^{2H} \mathbb{E}B_t^H B_s^H = \frac{a^{2H}}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right). \quad (3.3)$$

Z dowolności  $t$  i  $s$  wynika teza. □

### 3.3. Unikalność

Udowodnimy teraz, że ułamkowy ruch Browna jest jedynym gaussowskim procesem samopodobnym o stacjonarnych przyrostach.

**Stwierdzenie 3.3. (o unikalności)** [4, stwierdzenie 2.2]

Jedynym ciągłym procesem gaussowskim  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  spełniającym

1.  $B_0^H = 0$  prawie na pewno
2.  $\text{Var}B_1^H = 1$
3.  $a^{-H} B_{at}^H \sim B_t^H$  dla dowolnych  $a, t \geq 0$  (jest samopodobny)
4. Dla dowolnego  $h > 0$  zachodzi  $B_{t+h}^H - B_t^H \sim B_t^H$  (ma stacjonarne przyrosty)

jest ułamkowy ruch Browna.

**Dowód.** Najpierw pokażmy, że jest to scentrowany proces gaussowski.

Własność stacjonarnych przyrostów daje nam  $\mathbb{E}B_{2t}^H = 2\mathbb{E}B_t^H$  ale jednocześnie, korzystając z samopodobieństwa procesu, otrzymujemy  $\mathbb{E}B_{2t}^H = 2^H \mathbb{E}B_t^H$ , zatem  $\mathbb{E}B_t^H = 0$  dla dowolnego  $t \geq 0$ .

Dla  $t, s \geq 0$  mamy ciąg równości

$$\begin{aligned} \mathbb{E}B_t^H B_s^H &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(B_t^H)^2 + \mathbb{E}(B_s^H)^2 - \mathbb{E}(B_t^H - B_s^H)^2 \right) \stackrel{(4)}{=} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \left( \mathbb{E}(B_t^H)^2 + \mathbb{E}(B_s^H)^2 - \mathbb{E}(B_{|t-s|}^H)^2 \right) \stackrel{(3)}{=} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \mathbb{E}(B_1^H)^2 \left( t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Zatem proces  $B^H$  jest ułamkowym ruchem Browna. □

### 3.4. FBm jako proces niebędący semimartyngałem

W tym podrozdziale pokażemy, że fBm nie jest semimartyngałem dla  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ . Zaczniemy od wprowadzenia definicji i podaniu paru własności wielomianów Hermite'a. Pojęcie to będzie wielce użyteczne w dowodzie Twierdzenia 3.1.

**Definicja 3.2.** Niech  $H_n(x)$  oznacza  $n$ -ty wielomian Hermite'a, który definiujemy następująco

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad \text{dla } n \geq 1 \quad (3.5)$$

oraz dodatkowo  $H_0(x) = 1$ .

**Definicja 3.3.** Niech  $\delta : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{C}^0$  będzie operatorem liniowym zdefiniowanym wzorem

$$(\delta\varphi)(x) = x\varphi(x) - \varphi'(x), \quad (3.6)$$

dla dowolnej funkcji różniczkowalnej  $\varphi$ .

Zauważmy, że wielomiany Hermite'a z Definicji 3.2 da się wyrazić przez operator z Definicji 3.3

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = (\delta^n \mathbb{1})(x), \quad (3.7)$$

gdzie  $\mathbb{1}$  oznacza funkcję stałą równą 1.

**Stwierdzenie 3.4. (o wielomianach Hermite'a)** [4, stwierdzenie 1.3]

Rodzina  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[X]$  wielomianów Hermite'a ma następujące własności

1.  $H'_k(x) = kH_{k-1}(x)$  oraz  $H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x)$  dla dowolnych  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Rodzina  $\left(\frac{1}{\sqrt{k!}}H_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$  jest bazą ortonormalną przestrzeni  $L^2\left(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ .
3. Niech  $(U, V)$  będzie wektorem normalnym z  $U, V \sim N(0, 1)$ , wtedy dla dowolnych  $k, l \in \mathbb{N}$  zachodzi

$$\mathbb{E}(H_k(U)H_l(V)) = k! \mathbb{E}(UV)^k \mathbb{1}_{k=l}.$$

**Dowód.** Zaczniemy od pierwszego podpunktu. Niech  $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  będzie operatorem różniczkowania, to znaczy  $DW = W'$ . Zauważmy, że dla dowolnego wielomianu  $W$  zachodzi

$$(D\delta - \delta D)W = W. \quad (3.8)$$

Dowód indukcyjny prowadzi nas do równości

$$D\delta^k - \delta^k D = k\delta^{k-1} \quad \text{dla } k \geq 1. \quad (3.9)$$

Stąd otrzymujemy

$$H'_k = D\delta^k \mathbb{1} = k\delta^{k-1} \mathbb{1} + \delta^k D\mathbb{1} = kH_{k-1} \quad \text{oraz} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x) &= (\delta^{k+1} \mathbb{1})(x) = (\delta\delta^k \mathbb{1})(x) = (\delta H_k)(x) = xH_k(x) - H'_k(x) = \\ &= xH_k(x) - kH_{k-1}(x). \end{aligned} \quad (3.11)$$

A to właśnie chcieliśmy pokazać w pierwszym podpunkcie. Zajmijmy się teraz drugim.

**Lemat 3.1.** Niech  $Z$  będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym oraz niech  $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będą funkcjami klasy  $\mathcal{C}^1$ , których pochodne nie rosną szybciej niż funkcja wykładnicza, wtedy

$$\mathbb{E}(\psi'(Z)\varphi(Z)) = \mathbb{E}(\psi(Z)(\delta\varphi)(Z)). \quad (3.12)$$

**Dowód.** Wystarczy zastosować całkowanie przez części.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\psi'(Z)\varphi(Z)) &= \int_{\mathbb{R}} \psi'(x)\varphi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left[ \psi(x)\varphi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (\varphi'(x) - x\varphi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) (\delta\varphi)(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \mathbb{E}(\psi(Z)(\delta\varphi)(Z)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Co kończy dowód lematu. □

Dowód ostatniego podpunktu twierdzenia opiera się na dowodzie z pracy [5, lemat 1.1.1]. Ortonormalność wielomianów Hermite'a dla  $k \neq l$  wynika z podpunktu trzeciego, który zaraz udowodnimy. Zauważmy, że  $\deg(H_k) = k$ . Aby zakończyć dowód podpunktu (2), musimy pokazać, że jednomiany  $X^k$  są gęste w przestrzeni  $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}})$ , a do udowodnienia tego wystarczy pokazać, że jeśli funkcja  $f \in L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}})$  spełniającej równanie  $\mathbb{E}(f(Z)Z^k) = 0$ , to wtedy  $f \equiv 0$ .

Dla  $w \in \mathbb{C}$  zdefiniujemy  $\varphi(w) = \mathbb{E}(f(Z)e^{iwZ})$ , wtedy podobnie jak przy funkcji charakterystycznej zachodzi równość

$$\varphi^{(k)}(w) = i^k \mathbb{E}(Z^k f(Z)e^{iwZ}). \quad (3.14)$$

Teraz korzystając z założenia dotyczącego funkcji  $f$  dostajemy, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$  zachodzi  $\varphi^{(k)}(0) = 0$ . Zatem z jednoznaczności transformaty Fouriera oraz analityczności funkcji  $f$  wynika, że  $f \equiv 0$  prawie na pewno.

Pozostaje do udowodnienia ostatni podpunkt stwierdzenia. Zauważmy, że dla wektora gaussowskiego  $(X, Y)$  takiego, że  $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$  oraz dla dowolnego  $t, s \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$\mathbb{E}\left(e^{sX - \frac{s^2}{2}} e^{tY - \frac{t^2}{2}}\right) = e^{st\mathbb{E}XY}. \quad (3.15)$$

Uzasadnijmy powyższą równość. Oznaczmy kowariancję zmiennych  $X$  i  $Y$  przez  $\rho$ , to znaczy  $\rho = \mathbb{E}XY$ . Zauważmy ponadto, że zmienne  $X - \rho Y$  oraz  $Y$  są niezależne. Stąd dla dowolnych  $s, t \in \mathbb{R}$  zmienne  $s(X - \rho Y)$  oraz  $(t + \rho s)Y$  są niezależne. Zatem możemy napisać

$$e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{E}e^{sX+tY} = e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{E}e^{s(X-\rho Y)+(t+\rho s)Y} = e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{E}e^{s(X-\rho Y)} \mathbb{E}e^{(t+\rho s)Y}. \quad (3.16)$$

Dopatrujemy się w powyższym iloczynie funkcji tworzących momenty scentrowanych zmiennych gaussowskich. Wiedząc ponadto, że  $\mathbb{E}(X - \rho Y)^2 = 1 - \rho^2$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \mathbb{E}e^{s(X-\rho Y)} \mathbb{E}e^{(t+\rho s)Y} &= e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} e^{\frac{1}{2}(s^2+2\rho st+t^2)} = e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} e^{\frac{1}{2}\mathbb{E}(sX+tY)^2} = \\ &= e^{st\mathbb{E}XY}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Teraz biorąc  $(n+m)$ -tą różniczkę częściową  $\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}$  w punkcie  $s = t = 0$  po obu stronach równania (3.15) dostajemy

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(Y)) = n! (\mathbb{E}XY)^n \mathbb{1}_{\{n=m\}}. \quad (3.18)$$

A to kończy dowód stwierdzenia.



□

Zwróćmy uwagę na poniższe twierdzenie. Może wydać się podobne do mocnego prawa wielkich liczb.

**Twierdzenie 3.1.** [4, twierdzenie 2.1]

Niech  $Z \sim N(0, 1)$  oraz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie mierzalną funkcją taką, że  $\mathbb{E}f^2(Z)$  istnieje. Jeśli  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem  $H \in (0, 1)$ , to wtedy zachodzi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}f(Z). \quad (3.19)$$

**Dowód.** Jeśli  $H = \frac{1}{2}$ , to teza wynika od razu z mocnego prawa wielkich liczb, wszak kolejne przyrosty są niezależne. Zajmijmy się przypadkiem gdy  $H \neq \frac{1}{2}$ . Skoro  $\mathbb{E}f^2(Z) < \infty$ , to korzystając z drugiego podpunktu Stwierdzenia 1 możemy zapisać funkcję  $f$  w terminach wielomianów Hermite'a

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{\sqrt{l!}} H_l(x). \quad (3.20)$$

Podnosząc teraz do kwadratu szereg po prawej stronie, podstawiając  $x := Z$ , obkładając obie strony równania operatorem wartości oczekiwanej i korzystając z (3) ze Stwierdzenia 1 otrzymujemy, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \mathbb{E}f^2(Z) \quad \text{oraz} \quad c_0 = \mathbb{E}f(Z).$$

Teraz możemy zapisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) \right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l}{\sqrt{l!}} \sum_{k=1}^n H_l(B_k^H - B_{k-1}^H). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zajmijmy się teraz zbieżnością w  $L^2$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^2}{l!} \sum_{k,m=1}^n \mathbb{E} \left( H_l(B_k^H - B_{k-1}^H) H_l(B_m^H - B_{m-1}^H) \right) \stackrel{(stw1.3)}{=} \\ &\stackrel{(stw1.3)}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,m=1}^n \mathbb{E} \left( (B_k^H - B_{k-1}^H) (B_m^H - B_{m-1}^H) \right)^l = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,m=1}^n \rho_H(k-m)^l, \end{aligned} \quad (3.22)$$

gdzie

$$\rho_H(x) = \rho_H(|x|) = \frac{1}{2} \left( |x+1|^{2H} + |x-1|^{2H} - 2|x|^{2H} \right) \quad \text{dla } x \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( B_1^H (B_{k+1}^H - B_k^H) \right) &= \mathbb{E} \left( B_1^H B_{k+1}^H \right) - \mathbb{E} \left( B_1^H B_k^H \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (k+1)^{2H} + 1 - k^{2H} - k^{2H} - 1 + (k-1)^{2H} \right) = \\ &= \rho_H(k) \end{aligned} \quad (3.23)$$

dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ . Zatem korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza dostajemy

$$|\rho_H(x)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(B_1^H)^2} \sqrt{\mathbb{E}(B_{|x|+1}^H - B_{|x|}^H)^2} = 1. \quad (3.24)$$

Stąd, jeśli potęgujemy  $\rho_H$ , to wartość nie rośnie.

To doprowadza nas do następujących wniosków

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) \right)^2 &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{\infty} c_l^2 \sum_{k,m=1}^n |\rho_H(k-m)| = \\ &= \text{Var}(f(Z)) \frac{1}{n^2} \sum_{k,m=1}^n |\rho_H(k-m)| = \text{Var}(f(Z)) \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1-m}^{n-m} |\rho_H(k)| \leq \\ &\leq 2\text{Var}(f(Z)) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)|. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pozostaje zbadać asymptotyczne zachowanie sumy  $\sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)|$ . Przypatrzmy się najpierw funkcji  $\rho_H$ .

$$\begin{aligned} \rho_H(k) &= \\ &= \frac{1}{2} \left( (k+1)^{2H} + (k-1)^{2H} - 2k^{2H} \right) = \frac{1}{2} \left( (k+1)^{2H} - k^{2H} - (k^{2H} - (k-1)^{2H}) \right) \sim \\ &\sim H \int_0^1 (k+u)^{2H-1} du - H \int_0^1 (k-u)^{2H-1} du = H \int_0^1 (k+u)^{2H-1} - (k-u)^{2H-1} du \sim \\ &\sim H(2H-1) \int_0^1 \int_{-x}^x (k+u)^{2H-2} du dx \sim H(2H-1)k^{2H-2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Stąd  $\rho_H(k) \sim H(2H-1)k^{2H-2}$  dla dużych  $k$ .

Zatem gdy  $H < \frac{1}{2}$ , to  $\sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)| \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |\rho_H(k)| < \infty$ . Wobec skończoności drugiego momentu zmiennej  $f(Z)$  uzyskujemy

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) \right)^2 \leq 2\text{Var}(f(Z)) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)| = \frac{C}{n} \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Pozostaje zatem przypadek gdy  $H > \frac{1}{2}$ , wtedy  $\sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)| \sim n^{2H-1}$ . Zatem

$$\mathbb{E} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(B_k^H - B_{k-1}^H) - \mathbb{E}f(Z) \right)^2 \leq 2\text{Var}(f(Z)) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\rho_H(k)| \sim Cn^{2H-2} \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

Co kończy dowód. □

### Uwaga.

Biorąc pod uwagę samopodobieństwo ułamkowego ruchu Browna, otrzymujemy następujący wniosek z tego twierdzenia

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left( n^H \left( B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right) \right) \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}f(Z). \quad (3.29)$$

### Stwierdzenie 3.5. (p-wahanie)

Niech  $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H \in (0, 1)$  oraz niech  $p \in [1, \infty)$  wtedy

$$\sum_{k=1}^n \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right|^p \xrightarrow{L^2} \begin{cases} 0 & \text{jeśli } p > \frac{1}{H} \\ \mathbb{E}|Z|^p & \text{jeśli } p = \frac{1}{H} \\ \infty & \text{jeśli } p < \frac{1}{H} \end{cases} \quad (3.30)$$

gdzie  $Z \sim N(0, 1)$ .

**Dowód.** Jest to proste zastosowanie Twierdzenia 3.1 dla funkcji  $f(x) = |x|^p$ . □

**Definicja 3.4.** Proces  $(Z_t)_{t < T}$  jest ciągłym semimartyngeałem, jeśli da się go przedstawić w postaci  $Z = Z_0 + M + A$ , gdzie  $Z_0$  jest zmienną  $\mathcal{F}_0$  mierzalną,  $M$  jest ciągłym martyngeałem lokalnym oraz  $A$  jest ciągłym, adaptowalnym procesem, którego trajektorie mają skończone wahanie na każdym odcinku  $[0, t]$ . Ponadto  $M_0 = A_0 = 0$ .

Naszym następnym celem będzie pokazanie, że ułamekowy ruch Browna nie jest ciągłym semimartyngeałem. Udowodnimy to za pomocą Twierdzenia 3.2 oraz następującego twierdzenia z analizy stochastycznej.

**Twierdzenie 3.2.**

Niech  $X_t = X_0 + M_t + A_t$  będzie ciągłym semimartyngeałem, a  $\pi_n$  podziałem odcinka  $[0, t]$  na  $n$  części, wtedy dla dowolnego podziału takiego, że  $\text{diam}(\pi_n) \rightarrow 0$  zachodzi

$$\sum_{k=1}^n \left( X_{t_k^{(n)}} - X_{t_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \longrightarrow \langle M \rangle_t. \quad (3.31)$$

według prawdopodobieństwa.

**Dowód.** Znajdziemy na przykład w [3, rozdział 11].

**Twierdzenie 3.3.** [4, twierdzenie 2.2]

Niech  $B^H$  będzie ułamekowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , wtedy  $B^H$  nie jest semimartyngeałem.

**Dowód.** Ze względu na samopodobieństwo ułamekowego ruchu Browna wystarczy rozważyć  $t \in [0, 1]$ . Ponadto, korzystając z Twierdzenia 3.2 dla semimartyngeałów określonych na odcinku  $[0, 1]$ , zachodzą warunki

1.  $\sum_{k=1}^n \left( X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}} \right)^2 \longrightarrow \langle X \rangle_1 < \infty$  według prawdopodobieństwa.
2. Jeśli dodatkowo  $\langle M \rangle_1 = 0$ , to  $X$  ma ograniczone wahanie.

Zajmijmy się przypadkiem gdy  $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

Stwierdzenie o p-wahaniu mówi nam, że  $\sum_{k=1}^n \left( B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right)^2 \longrightarrow \infty$ , zatem warunek 1. nie zachodzi, stąd  $B^H$  nie może być semimartyngeałem.

Niech teraz  $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

W tym wypadku stwierdzenie o p-wahaniu orzeka, że  $\sum_{k=1}^n \left( B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right)^2 \longrightarrow 0$ .

Niech  $p \in \left(1, \frac{1}{H}\right)$ , wtedy  $\sum_{k=1}^n \left( B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right)^p \longrightarrow \infty$ , z tego samego powodu co wyżej. Co więcej, z ciągłości trajektorii dostajemy warunek

$$\sup_{1 \leq k \leq n} \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right|^{p-1} \longrightarrow 0$$

prawie na pewno. Zatem używając prostej nierówności

$$\sum_{k=1}^n \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right|^p \leq \sup_{1 \leq k \leq n} \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right|^{p-1} \cdot \sum_{k=1}^n \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right|$$

wniosujemy, że  $\sum_{k=1}^n \left| B_{\frac{k}{n}}^H - B_{\frac{k-1}{n}}^H \right| \longrightarrow \infty$ , a to stoi w sprzeczności z warunkiem 2. Zatem  $B^H$  nie może być semimartyngeałem dla dowolnego  $H \in (0, 1)$ . □



## Rozdział 4

# Reprezentacja ułamkowego ruchu Browna

W tym rozdziale przedstawimy nasz tytułowy proces jako całkę względem procesu Wienera, a nawet zrobimy to na trzy sposoby. Zaczniemy jednak od przypomnienia faktów z analizy stochastycznej.

**Definicja 4.1.** Dwustronnym procesem Wienera nazywamy proces  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  taki, że

$$W_t = \begin{cases} V_t & \text{jeśli } t \geq 0 \\ U_t & \text{jeśli } t < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie  $V$  i  $U$  są niezależnymi jednostronnymi procesami Wienera.

**Stwierdzenie 4.1.** [3, stwierdzenie 8.2]

Jeśli funkcje  $f, g \in L^2$  oraz  $(W_s)_{s \in \mathbb{R}}$  jest dwustronnym procesem Wienera, to zachodzą równości

1.  $\mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}} f(s) dW_s) = 0$ ,
2.  $\mathbb{E}(\int_{\mathbb{R}} f(s) dW_s \int_{\mathbb{R}} g(s) dW_s) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(s) ds$ ,
3. zmienna  $\int_{\mathbb{R}} f(s) dW_s$  ma rozkład  $N(0, \int_{\mathbb{R}} f^2(s) ds)$ .

### 4.1. Reprezentacja czasowa

**Twierdzenie 4.1.** [4, stwierdzenie 2.3]

Niech  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  będzie dwustronnym procesem Wienera oraz  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , wtedy proces  $B_t^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  zdefiniowany jako

$$B_t^H = \frac{1}{c_H} \left( \int_{-\infty}^0 \left( (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_u + \int_0^t (t-u)^{H-\frac{1}{2}} dW_u \right), \quad (4.2)$$

gdzie

$$c_H = \sqrt{\frac{1}{2H} + \int_0^\infty \left( (1+u)^{H-\frac{1}{2}} - u^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 du} < \infty, \quad (4.3)$$

jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H$ .

**Dowód.** Na początku sprawdzimy, że całka jest dobrze określona. Oznaczmy  $f(u) = (t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}}$  dla  $u \leq 0$ . Zauważmy następnie, że

$$(t-u)^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} = \left( H - \frac{1}{2} \right) \int_0^t (w-u)^{H-\frac{3}{2}} dw \sim \left( H - \frac{1}{2} \right) t(-u)^{H-\frac{3}{2}}. \quad (4.4)$$

Zatem  $f^2(u) \sim \left(H - \frac{1}{2}\right)^2 t^2 (-u)^{2H-3}$ . Stąd widzimy, że nie ma problemu z całkowalnością  $f^2$  w  $-\infty$ , ponieważ  $2H - 3 < 1$ . Zatem rzeczywiście całka (4.2) jest dobrze określona. Zapiszmy ową całkę w nieco wygodniejszej postaci

$$\frac{1}{c_H} \int_{\mathbb{R}} \left( (t-u)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{u < t\}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{u < 0\}} \right) dW_u. \quad (4.5)$$

Niech  $t > s \geq 0$ , wtedy odpowiednio zmieniając zmienne oraz korzystając ze stwierdzenia 4.1 otrzymujemy ciąg równości

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( B_t^H - B_s^H \right)^2 &= \frac{1}{c_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left( (t-u)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{u < t\}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{u < s\}} \right)^2 du = \\ &= \frac{1}{c_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left( (t-s-v)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{v < t-s\}} - (-v)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{v < 0\}} \right)^2 dv = \\ &= \frac{(t-s)^{2H-1}}{c_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \left(1 - \frac{v}{t-s}\right)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{v < t-s\}} - \left(-\frac{v}{t-s}\right)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{v < 0\}} \right)^2 dv = \\ &= \frac{(t-s)^{2H}}{c_H^2} \int_{\mathbb{R}} \left( (1-z)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{z < 1\}} - (-z)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{z < 0\}} \right)^2 dz = \\ &= (t-s)^{2H}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ostatnie przejście wynika z następującego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left( (1-z)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{z < 1\}} - (-z)^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{z < 0\}} \right)^2 dz &= \int_0^\infty \left( (1+z)^{H-\frac{1}{2}} - z^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dz + \\ + \int_0^1 \left( (1-z)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dz &= \int_0^\infty \left( (1+z)^{H-\frac{1}{2}} - z^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dz + \int_0^1 w^{2H-1} dw = \\ = \int_0^\infty \left( (1+z)^{H-\frac{1}{2}} - z^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dz + \frac{1}{2H} &= c_H^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Zauważmy ponadto, że  $B_0^H = 0$ . Zatem korzystając z tych dwóch faktów dostajemy, że dla dowolnych  $t > s \geq 0$  zachodzi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( B_t^H B_s^H \right) &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{E} \left( B_t^H - B_0^H \right)^2 + \mathbb{E} \left( B_s^H - B_0^H \right)^2 - \mathbb{E} \left( B_t^H - B_s^H \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

A jak dowiedliśmy w rozdziale trzecim jedynym procesem gaussowskim spełniającym te warunki jest ułankowy ruch Browna. □

## 4.2. Reprezentacja spektralna

Przyjrzyjmy się teraz kolejnej reprezentacji fBm. Dowód będzie niemal identyczny jak dowód twierdzenia 4.1, niemniej samo przedstawienie jest ciekawe.

**Twierdzenie 4.2.** [4, stwierdzenie 2.4]

Niech  $(W_t)_{t \in \mathbb{R}}$  będzie dwustronnym procesem Wienera oraz  $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ , wtedy proces  $B_t^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$  zdefiniowany jako

$$B_t^H = \frac{1}{c_H} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{1 - \cos(ut)}{|u|^{H+\frac{1}{2}}} dW_u + \int_0^\infty \frac{\sin(ut)}{u^{H+\frac{1}{2}}} dW_u \right), \quad (4.9)$$

gdzie

$$c_H = \sqrt{2 \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u)}{u^{2H+1}} du} < \infty. \quad (4.10)$$

jest ułankowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H$ .

**Dowód.** Tutaj sprawdzenie, że całka (4.9) jest dobrze określona jest natychmiastowe, ponieważ

$$\int_\varepsilon^\infty \left( \frac{\sin(ut)}{u^{H+\frac{1}{2}}} \right)^2 du < \int_\varepsilon^\infty u^{-2H-1} du = \frac{1}{2H} \varepsilon^{-2H} < \infty.$$

Dodatkowo dla małych  $u$ , rozwijając w szereg Taylora znamy zachowanie sinus, zatem

$$\int_0^\varepsilon \left( \frac{\sin(ut)}{u^{H+\frac{1}{2}}} \right)^2 du \leq \int_0^\varepsilon \left( \frac{ut}{u^{H+\frac{1}{2}}} \right)^2 du = t^2 \int_0^\varepsilon u^{-2H+1} du = \frac{t^2}{2-2H} \varepsilon^{2-2H} < \infty.$$

Dokładnie te same argumenty uzasadniają istnienie pierwszego składnika w całce (4.9). Korzystając ze stwierdzenia 4.1 wiemy, że  $B^H$  jest scentrowanym procesem gaussowskim. Niech  $t > s \geq 0$ , wtedy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( B_t^H - B_s^H \right)^2 &= \frac{1}{c_H^2} \int_{-\infty}^0 \frac{(\cos(ut) - \cos(us))^2}{|u|^{2H+1}} du + \frac{1}{c_H^2} \int_0^\infty \frac{(\sin(ut) - \sin(us))^2}{u^{2H+1}} du = \\ &= \frac{2}{c_H^2} \int_0^\infty \frac{\left( (\cos(ut) - \cos(us))^2 + (\sin(ut) - \sin(us))^2 \right)}{u^{2H+1}} du = \\ &= \frac{2}{c_H^2} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(u(t-s))}{u^{2H+1}} du = \frac{2(t-s)^{2H}}{c_H^2} \int_0^\infty \frac{1 - \cos z}{z^{2H+1}} dz = \\ &= (t-s)^{2H}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Widzimy ponadto, że  $B_0^H = 0$ . Zatem korzystając z dwóch powyższych obserwacji wnioskujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} B_t^H B_s^H &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{E} \left( B_t^H - B_0^H \right)^2 + \mathbb{E} \left( B_s^H - B_0^H \right)^2 - \mathbb{E} \left( B_t^H - B_s^H \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ponadto  $B^H$  jest procesem gaussowskim. Zatem, podobnie jak poprzednio,  $B^H$  jest ułankowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H$ .

□

### 4.3. FBm jako proces Volterra

Ten podrozdział zaczniemy od zdefiniowania czym jest proces Volterra, a następnie udowodnimy, że ułankowy ruch Browna jest takim procesem.

**Definicja 4.2.** Proces  $(X_t)_{t \in T}$  nazywamy procesem Volterra, gdy spełniona jest równość

$$X_t = \int_0^t K(t, s) dW_s, \quad (4.13)$$

gdzie  $K$  jest całkownym z kwadratem jądrem, a  $(W_s)_{s \geq 0}$  zwyczajnym procesem Wienera.

Teraz, zgodnie z obietnicą, przytoczymy bardzo ważne twierdzenie charakteryzujące ułankowy ruch Browna.

**Twierdzenie 4.3.** [5, stwierdzenie 5.1.3]

Ułamkowy ruch Browna jest procesem Volterry z jądrem  $K_H$  danym wzorem

$$K_H(t, s) = \begin{cases} C_1(H) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du & \text{jeśli } H > \frac{1}{2} \\ C_2(H) \left[ \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H-\frac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-s)^{H-\frac{1}{2}} du \right] & \text{jeśli } H < \frac{1}{2} \end{cases}$$

gdzie stałe (zależne od  $H$ ) wynoszą odpowiednio

$$C_1(H) = \sqrt{\frac{H(2H-1)}{\int_0^1 (1-x)^{1-2H} x^{H-\frac{3}{2}} dx}} \quad (4.14)$$

oraz

$$C_2(H) = \sqrt{\frac{2H}{(1-2H) \int_0^1 (1-x)^{-2H} x^{H-\frac{1}{2}} dx}} \quad (4.15)$$

**Dowód.** Przeprowadzimy dla  $H > \frac{1}{2}$ . Drugi przypadek można znaleźć w [6, stwierdzenie 5.1.3]. Najpierw sprawdzimy, że całka Volterry jest dobrze określona, to znaczy chcemy pokazać, że dla dowolnego  $t > 0$  zachodzi

$$\int_0^t K_H^2(s, t) ds = C_1^2(H) \int_0^t s^{1-2H} \left( \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du \right)^2 ds < \infty. \quad (4.16)$$

Przyjrzymy się najpierw całce wewnętrznej, oznaczmy  $\alpha = H - \frac{1}{2}$ , wtedy

$$\begin{aligned} \int_s^t (u-s)^{\alpha-1} u^\alpha du &= (-s)^{\alpha-1} \int_s^t \left(1 - \frac{u}{s}\right)^{\alpha-1} u^\alpha du = \\ &= (-1)^{\alpha-1} s^{2\alpha-1} \int_s^t \left(1 - \frac{u}{s}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha du = \\ &= (-1)^\alpha s^{2\alpha} \int_{\frac{t}{s}}^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\alpha dy \leq (-1)^\alpha s^{2\alpha} B(\alpha+1, \alpha), \end{aligned} \quad (4.17)$$

gdzie  $B(\cdot)$  oznacza funkcje beta. Stąd wnioskujemy dalej, że

$$\int_0^t K_H^2(s, t) ds \leq B^2(\alpha+1, \alpha) \int_0^t s^{1-2H} s^{4H-2} ds = B^2(\alpha+1, \alpha) \int_0^t s^{2H-1} ds < \infty. \quad (4.18)$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnego  $t > 0$ , ponieważ  $2H - 1 > 0$ . Korzystając ze Stwierdzenia 4.1 wiemy już, że  $B^H$  jest scentrowanym procesem gaussowskim, zatem zostaje nam policzenie funkcji kowariancji.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} B_t^H B_s^H &= \\ &= \int_0^{t \wedge s} K_H(t, x) K_H(s, x) dx = \\ &= C_1^2(H) \int_0^s \int_x^t \int_x^s x^{1-2H} (y-x)^{H-\frac{3}{2}} y^{H-\frac{1}{2}} (z-x)^{H-\frac{3}{2}} z^{H-\frac{1}{2}} dz dy dx = \\ &= C_1^2(H) \int_0^s z^{H-\frac{1}{2}} \int_0^t y^{H-\frac{1}{2}} \int_0^{y \wedge z} x^{1-2H} (y-x)^{H-\frac{3}{2}} (z-x)^{H-\frac{3}{2}} dx dy dz. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Rozważmy teraz wyłącznie ostatnią całkę. Załóżmy, że  $z > y$  oraz podstawmy  $v = \frac{z-x}{y-x}$ . Po tej operacji oraz uproszczeniu dostajemy naszą całkę w następującej postaci

$$(z-y)^{2H-2} \int_{\frac{z}{y}}^\infty (vy-z)^{1-2H} v^{H-\frac{3}{2}} dv = (z-y)^{2H-2} \int_{\frac{z}{y}}^\infty \left(1 - \frac{z}{vy}\right)^{1-2H} v^{-H-\frac{1}{2}} y^{1-2H} dv. \quad (4.20)$$



Podstawmy teraz  $\varphi = \frac{z}{vy}$ . Kontynuując rachunki otrzymujemy

$$\begin{aligned} &= (z-y)^{2H-2}(yz)^{-H+\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-\varphi)^{1-2H} \varphi^{H-\frac{3}{2}} d\varphi = \\ &= (z-y)^{2H-2}(yz)^{-H+\frac{1}{2}} B\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wstawiając powyższy wynik, do równania (4.19), uzyskujemy

$$\mathbb{E}B_t^H B_s^H = H(2H-1) \int_0^s \int_0^t (z-y)^{2H-2} dy dz = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}). \quad (4.22)$$

Podsumowując, mamy do czynienia ze scentrowanym gaussowskim procesem o ciągłych trajektoriach. Ponadto  $B_0^H = 0$  oraz funkcja kowariancji ma odpowiednią postać. Zatem, jak pokazaliśmy w podrozdziale 3.3, proces  $B^H$  jest ułamkowym ruchem Browna. Zatem dowód został zakończony.

□



## Rozdział 5

# Ułamkowy ruch Browna jako proces graniczny

Wedle tytułu, zajmiemy się w tym rozdziale procesami stochastycznymi, które zbiegają według rozkładu do ułamkowego ruchu Browna.

Zacznijmy od regularnego procesu wizyt z niepunktualnością. Rozpatrzmy model wizyt klientów w pewnej firmie. Klient  $j$  jest umówiony na spotkanie w firmie na  $j$ -tą godzinę (ogólniej na  $j$ -tą jednostkę czasu). Bywa, że klienci przychodzą wcześniej lub się spóźniają. Oznaczmy przez  $\xi_j + j$  rzeczywisty czas przybycia na spotkanie, zatem jeśli  $\xi_j > 0$  to klient jest spóźniony oraz w przeciwnym przypadku przychodzi za wcześnie. Oznaczmy przez  $N_n$  liczę wizyt w czasie  $n$  godzin, to znaczy

$$N_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{(0,n]}(\xi_j + j). \quad (5.1)$$

Rozpatrujemy również ujemne indeksy gdyż może się zdarzyć sytuacja, że w danej chwili osoba była umówiona na godzinę temu i się spóźni na przykład 3 godziny, wtedy  $\xi_j = 3$  oraz  $j = -1$ . W tym modelu zakładamy, że zmienne  $\xi_j$  mają ciężkie ogony, to znaczy

$$\mathbb{P}(\xi_j > x) \sim cx^{-\alpha}, \quad (5.2)$$

gdzie  $c \in (0, \infty)$  oraz  $\alpha \in (0, 1)$ .

Zdefiniujmy ponadto proces  $X_n = (X_n(t))_{t \geq 0}$  wzorem

$$X_n(t) = \frac{N_{\lfloor nt \rfloor} - \lfloor nt \rfloor}{n^{(1-\alpha)/2}}. \quad (5.3)$$

Załóżmy, że  $H < \frac{1}{2}$ . Naszym głównym celem będzie pokazanie następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 5.1.** [1, twierdzenie 1]

Niech  $(\xi_i)_{i=-\infty}^{\infty}$  będzie ciągiem niezależnych nieujemnych zmiennych losowych spełniającym warunek (5.2), wtedy

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} \sqrt{\frac{2c}{1-\alpha}} B^H, \quad (5.4)$$

gdzie  $B^H$  jest ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta  $H = \frac{1-\alpha}{2}$ .

**Dowód.** Na początku pokażemy zbieżność (5.4) dla rozkładów skończenie wymiarowych, a następnie pokażemy ciasność ciągu  $(X_n)$ . Zbieżność skończenie wymiarowych rozkładów pokażemy dla dwuwymiarowego rozkładu  $X_n = (X_n(t_1), X_n(t_2))$ . Ogólny przypadek jest analogiczny. Będziemy dążyli do pokazania zbieżności funkcji generującej momenty  $X$  do funkcji generującej

momenty dwuwymiarowego scentrowanego wektora gaussowskiego. Zauważmy najpierw, że dla  $t \geq 0$  mamy

$$\begin{aligned} X_n(t) &= n^{-H} \left( \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{1}_{(0, \lfloor nt \rfloor)}(\xi_j + j) - \lfloor nt \rfloor + \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(0, \lfloor nt \rfloor)}(\xi_j + j) \right) = \\ &= n^{-H} \left( - \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{1}_{(\lfloor nt \rfloor, \infty)}(\xi_j + j) + \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(0, \lfloor nt \rfloor)}(\xi_j + j) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Niech  $t_2 > t_1 \geq 0$  oraz  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ . Dla prostoty oznaczmy  $n_1 = \lfloor nt_1 \rfloor$ ,  $n_2 = \lfloor nt_2 \rfloor$ ,  $z_1 = n^{-H} y_1$  oraz  $z_2 = n^{-H} y_2$ . Przy tych oznaczeniach mamy

$$\begin{aligned} y_1 X_n(t_1) + y_2 X_n(t_2) &= -z_1 \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{1}_{(n_1, \infty)}(\xi_j + j) - z_2 \sum_{j=1}^{n_2} \mathbb{1}_{(n_2, \infty)}(\xi_j + j) + \\ &+ z_1 \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(0, n_1)}(\xi_j + j) + z_2 \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(0, n_2)}(\xi_j + j) = \\ &= -(z_1 + z_2) \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{1}_{(n_2, \infty)}(\xi_j + j) - z_1 \sum_{j=1}^{n_1} \mathbb{1}_{(n_1, n_2]}(\xi_j + j) - \\ &- z_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \mathbb{1}_{(n_2, \infty)}(\xi_j + j) + (z_1 + z_2) \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(0, n_1]}(\xi_j + j) + \\ &+ z_2 \sum_{j \leq 0} \mathbb{1}_{(n_1, n_2]}(\xi_j + j). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Po drugim znaku równości rozdzieliliśmy tak sumy aby odpowiednie składniki były ze sobą niezależne. Teraz łatwo policzymy logarytm funkcji generującej momenty wektora  $X$ . Oznaczmy jeszcze ogon rozkładu  $\xi_j$  jako  $G(x) = \mathbb{P}(\xi_0 > x) = 1 - F(x)$ .

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E} \exp(y_1 X_n(t_1) + y_2 X_n(t_2)) &= \\ &= \ln \mathbb{E} \exp(-(z_1 + z_2)S_1 - z_1 S_2) \mathbb{E} \exp(-z_2 S_3) \mathbb{E} \exp((z_1 + z_2)S_4 + z_2 S_5) = \\ &= \sum_{j=1}^{n_1} \ln \left( 1 + (e^{-(z_1+z_2)} - 1) G(n_2 - j) + (e^{-z_1} - 1) (G(n_1 - j) - G(n_2 - j)) \right) + \\ &+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \ln \left( 1 + (e^{-z_2} - 1) G(n_2 - j) \right) + \\ &+ \sum_{j \leq 0} \ln \left( 1 + (e^{z_1+z_2} - 1) (G(-j) - G(n_1 - j)) + (e^{z_2} - 1) (G(n_1 - j) - G(n_2 - j)) \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Zauważmy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_i = 0$  dla  $i \in \{1, 2\}$  oraz  $\ln(1+x) \sim x$  dla  $x$  bliskich 0. Zatem zachodzi

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E} \exp(y_1 X_n(t_1) + y_2 X_n(t_2)) &\sim \\ &\sim (e^{-z_1-z_2} - e^{-z_1}) \sum_{j=1}^{n_1} G(n_2 - j) + (e^{-z_1} - 1) \sum_{j=1}^{n_2} G(n_1 - j) + \\ &+ (e^{-z_2} - 1) \sum_{j=n_1+1}^{n_2} G(n_2 - j) + (e^{z_1+z_2} - 1) \sum_{j=0}^{\infty} (G(j) - G(n_1 + j)) + \\ &+ (e^{z_2} - 1) \sum_{j=0}^{\infty} (G(n_1 + j) - G(n_2 + j)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dystrybuanta jest niemalejąca, zatem możemy napisać proste oszacowanie. Jeśli  $0 \leq k_1 \leq k_2$  oraz  $i \geq k_2 - k_1$ , wtedy zachodzi

$$\sum_{j=k_1+i+1}^{k_2+i} G(j) \leq (k_2 - k_1) G(k_1 + i + 1) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \quad (5.9)$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (G(k_1 + j) - G(k_2 + j)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i (G(k_1 + j) - G(k_2 + j)) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=k_1}^{k_2-1} G(j) - \sum_{j=k_1+i+1}^{k_2+i} G(j) \right) \stackrel{(5.9)}{=} \sum_{j=k_1}^{k_2-1} G(j). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Teraz możemy uprościć wyrażenie (5.8) korzystając z (5.10) oraz zachowania funkcji wykładniczej

$$\begin{aligned} \ln \mathbb{E} \exp(y_1 X_n(t_1) + y_2 X_n(t_2)) &\sim (e^{-z_1 - z_2} - e^{-z_1}) \sum_{j=n_2-n_1}^{n_2-1} G(j) + \\ &+ (e^{-z_1} - 1) \sum_{j=0}^{n_1-1} G(j) + (e^{-z_2} - 1) \sum_{j=0}^{n_2-n_1-1} G(j) + (e^{z_1+z_2} - 1) \sum_{j=0}^{n_1-1} G(j) + \\ &+ (e^{z_2} - 1) \sum_{j=n_1}^{n_2-1} G(j) = \frac{1}{2} n^{-H} \left( (y_1 + y_2)^2 - y_1^2 + \mathcal{O}(n^{-H}) \right) \sum_{j=n_2-n_1}^{n_2-1} G(j) + \\ &+ (y_1^2 + \mathcal{O}(n^{-H})) \sum_{j=0}^{n_1-1} G(j) + (y_2^2 + \mathcal{O}(n^{-H})) \sum_{j=0}^{n_2-n_1-1} G(j) + \\ &+ \left( (y_1 + y_2)^2 + \mathcal{O}(n^{-H}) \right) \sum_{j=0}^{n_1-1} G(j) + (y_2^2 + \mathcal{O}(n^{-H})) \sum_{j=n_1}^{n_2-1} G(j). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Teraz zbadamy zachowanie sumy ogonów zmiennych  $\xi_i$ . Niech  $\delta \in (0, 1 - \alpha)$ , wtedy dla  $t > 0$  mamy

$$n^{-2H} \sum_{j=0}^{\lfloor nt \rfloor} G(j) = n^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\lfloor n^\delta \rfloor} G(j) + n^{\alpha-1} \sum_{j=\lfloor n^\delta \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} G(j).$$

Mając w pamięci założenie  $\mathbb{P}(\xi_i > x) \sim cx^{-\alpha}$  pokażemy, że pierwsza suma jest dla dużych  $n$  nieistotna oraz zbadamy asymptotykę drugiego składnika

$$n^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\lfloor n^\delta \rfloor} G(j) \sim n^{\alpha-1} c \sum_{j=0}^{\lfloor n^\delta \rfloor} j^{-\alpha} \sim cn^{\alpha-1} \int_0^{n^\delta} x^{-\alpha} dx = \frac{c}{1-\alpha} n^{(1-\alpha)(1-\delta)} \longrightarrow 0, \quad (5.12)$$

przy  $n \rightarrow \infty$ . Zajmijmy się teraz drugim składnikiem

$$\begin{aligned} n^{\alpha-1} \sum_{j=\lfloor n^\delta \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} G(j) &\sim cn^{\alpha-1} \sum_{j=\lfloor n^\delta \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} j^{-\alpha} = c \sum_{j=\lfloor n^\delta \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{j}{n} \right)^{-\alpha} \sim c \int_{n^{\delta-1} + \frac{1}{n}}^t y^{-\alpha} dy = \\ &= \frac{c}{1-\alpha} \left( t^{1-\alpha} - \left( n^{\delta-1} + \frac{1}{n} \right)^{1-\alpha} \right) \longrightarrow \frac{ct^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Wreszcie, korzystając z (5.11) oraz (5.13) obliczymy granicę logarytmu funkcji tworzącej momenty wektora  $X$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \mathbb{E} \exp(y_1 X_n(t_1) + y_2 X_n(t_2)) &= \frac{c}{2(1-\alpha)} \left( (y_2^2 + 2y_1 y_2) (t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}) + \right. \\ &+ y_1^2 t_1^{2H} + y_2^2 (t_2 - t_1)^{2H} + (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2) t_1^{2H} + y_2^2 (t_2^{2H} - t_1^{2H}) \left. \right) = \\ &= \frac{c}{(1-\alpha)} \left( y_1^2 t_1^{2H} + y_2^2 t_2^{2H} + y_1 y_2 (t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Sprawdźmy jeszcze, że powyższa granica rzeczywiście jest logarytmem funkcji generującej momenty ułamkowego ruchu Browna.

Jeśli  $X = (X_1, \dots, X_n)$  jest wektorem gaussowskim o macierzy kowariancji  $\Sigma$ , to wtedy funkcja generująca momenty zmiennej  $X$  ma postać

$$M_X(t) = \exp\left(t^T \mu + \frac{1}{2} t^T \Sigma t\right).$$

Macierz kowariancji wektora  $(B_{t_1}^H, B_{t_2}^H)$  ma postać

$$\Sigma = \begin{bmatrix} t_1^{2H} & \frac{1}{2} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}) \\ \frac{1}{2} (t_1^{2H} + t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}) & t_2^{2H} \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\ln \mathbb{E} \exp\left(y_1 B_{t_1}^H + y_2 B_{t_2}^H\right) = \frac{1}{2} \left( y_1^2 t_1^{2H} + y_2^2 t_2^{2H} + y_1 y_2 (t_2^{2H} + t_1^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}) \right). \quad (5.15)$$

Pokazując zbieżność odpowiednich funkcji generujących momenty, pokazaliśmy zbieżność według rozkładów skończenie wymiarowych. Ze zbieżności funkcji tworzącej momenty wynika ciasność ciągu  $X_n(t)$ . Zatem dowiedliśmy twierdzenie.

□

## Rozdział 6

# Podsumowanie

W powyższej pracy zdefiniowaliśmy ułamkowy ruch Browna i naszkicowaliśmy jego ważniejsze własności. Jak już zostało wspomniane i udowodnione, ułamkowy ruch Browna nie jest semimartyngałem, stąd nie da się bezpośrednio zastosować teorii Ito do całkowania względem  $fBm$ . Dlaczego chcielibyśmy całkować względem tego procesu? Jednym z zastosowań jest rozszerzenie modelu Blacka-Scholesa służącego do wyceny instrumentów pochodnych. Rozszerzenie polega na zastąpieniu procesu Wienera przez  $fBm$  w równaniu różniczkowym opisującym zmianę ceny instrumentu. Taka zmiana pozwoli nam na lepsze modelowanie rynków finansowych przez odpowiednią manipulację parametrem Hursta.

Konstrukcja całki względem ułamkowego ruchu Browna jest bardzo ciekawa, początkowo podobna do konstrukcji całki izometrycznej Ito. Niestety ze względu na ograniczenia fizyczne pracy nie zostało to opisane, podobnie jak wiele innych interesujących twierdzeń dotyczących ułamkowego ruchu Browna. Mam nadzieję, że czytelnik po przeczytaniu tej pracy będzie posiadał solidne podstawy do badania dalszych zagadnień dotyczących tytułowego procesu.





# Bibliografia

- [1] V.F. Araman, P.W. Glynn, *Fractional Brownian Motion With  $H < \frac{1}{2}$  as a Limit of Scheduled Traffic*, Journal of Applied Probability, nr 49, s. 710-718, 2012.
- [2] R.M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] R. Latała, *Wstęp do Analizy Stochastycznej*, Uniwersytet Warszawski, 2011.
- [4] I. Nourdin, *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*, Bocconi & Springer Series 2012.
- [5] D. Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer, 2006.
- [6] M.S. Taqqu, *Benoit Mandelbrot and Fractional Brownian Motion*, Statistical Science 2013, T. 28, nr 1, s. 131-134.